DIE BEUGUNGSERSCHEINUNGEN IM ULTRAMIKROSKOP.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT LEIPZIG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

KARL POTZGER.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1909.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren Wiener und Bruns.

Leipzig, den 19. Juni 1909.

Der Procancellar
Köster.

Sonderabdruck aus den Annalen der Physik, Bd. 30. 1909.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

MEINEN LIEBEN ELTERN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546813_0082

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

I. Teil.

Vergleich der im Ultramikroskop auftretenden und der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen.

1. Untersuchung über die Einstellung auf die geometrische Abbildungsebene 9
2. Vergleich der Fraunhoferschen und der im Ultramikroskop auftretenden Beugungserscheinungen 10
3. Einfluß der Blendengröße auf die Beugung im Ultramikroskop 13

II. Teil.

Mathematische Entwickelungen.

1. Die Gleichung für den austretenden Strahl 15
2. Die Gleichung der Brennlinie 16
3. Die Gleichung für die Bogenlänge der Brennlinie 18
4. Die Gleichung der Wellenlinie 19
5. Das Bogenelement $d\sigma$ der Wellenlinie 20
6. Die auf einem Elemente df der Wellenfläche vorhandene Schwingungsamplitude 21
7. Die Mascartsche Formel 23
8. Die Berechnung der Δ 27

III. Teil.

Experimentelle Bestimmung der Konstanten, Messung und numerische Rechnung.

1. Der Abstand des leuchtenden Teilchens von dem Mittelpunkt der Linse 29
2. Der Radius der brechenden Kugellinse 30
3. Die Brechungsexponenten 32

Seite

4. Wellenlänge des Lichtes und Lichtquelle 33
5. Das Spektrometer 34
6. Das Objektiv 34
7. Die Versuchsanordnung 34
8. Die Beugungsringe und ihre Messung 35
9. Die Form der Wellenlinie 37
10. Die Durchmesser der Beugungsringe 38
11. Diskussion der Messung und Rechnung 43
12. Die beiden Ringsysteme 43
13. Erklärung der Blendenwirkung 45
14. Zusammenfassung der Resultate 46

Einleitung.

Wenn man unter dem Ultramikroskop Teilchen, z. B. Goldteilchen im Zsigmondyschen Goldrubinglas, beobachtet, deren Dimension jenseits der Auflösungsgrenze des Mikroskops liegt, so erblickt man um die hellste mittlere Partie ein System von Interferenzringen, deren Aussehen mitunter so fremdartig ist, daß es sich nicht auf bisher genauer untersuchte Beugungserscheinungen zurückführen läßt. Man muß sich dabei klar werden, daß das Teilchen selbst wegen seiner weit unter der Wellenlänge des Lichtes liegenden Größe keinen Anlaß zu Beugungserscheinungen geben kann. Aber auch die gewöhnliche Fraunhofersche Beugungserscheinung, wie man sie bei natürlichen oder künstlichen Sternen im Fernrohr sehen kann, kommen hier nicht in Frage, denn die Helligkeitsverteilung in den Ringen, welche außen oft viel heller sind als innen, spricht gegen eine solche Erklärung. Ferner erblickt man im Ultramikroskop zwei ganz verschiedene Ringsysteme, von denen das eine (Ringsystem I) nach innen, das andere (Ringsystem II) nach außen wandert, wenn man den Abstand des Teilchens von der Frontlinse des Objektivs verkleinert. Es ist dies eine Erscheinung, wie man sie bei gewöhnlichen Beugungsphänomenen nicht beobachten kann. Besonders von mir angestellte Versuche haben ergeben, daß man das Gesichtsfeld ganz bedeutend einschränken muß, um eine normale Fraunhofersche Beugungserscheinung zu erhalten. Woher aber sollen dann diese Interferenzringe kommen?

Hr. Prof. Wiener schlug mir zufolge einer ihm gesprächsweise von Prof. Bruns gewordenen Anregung vor, näher zu verfolgen, ob durch die Deformation der Wellenfläche infolge der Brechung an den Kugelflächen der Linsen die Erscheinungen

in ähnlicher Weise zustande kommen können, wie die sogenannten überzähligen Bogen beim Regenbogenphänomen. Bekanntlich wird eine ebene Lichtwelle durch Brechung und Reflexion an einer Kugel zu einer sehr verwickelten Wellenoberfläche verzerrt, deren Schnitte Wendepunkte aufweisen. Es hat Mascart[1]) nachgewiesen, daß die von Airy[2]) genau untersuchten Beugungserscheinungen in einfacher Weise zustande gekommen gedacht werden können durch die Interferenz der Wellen, welche von den Polen der Wellenlinie ausgehen. Unter diesen Polen hat man sich die Fußpunkte der von einem im Unendlichen gelegenen Beschauungspunkte auf die Wellenfläche gefällten Normalen zu denken.

Wollte man diese Frage entscheiden, so war es, um unübersehbare Rechnungen zu vermeiden, vor allem nötig, die Zahl der brechenden Flächen möglichst zu beschränken. Es gelang mir, sie auf eine einzige Kugelfläche zu reduzieren, welche die Erscheinungen genau so zeigte, wie ein zusammengesetztes System. Zu diesem Zwecke wurde als Linse eine Halbkugel aus Glas vom gleichen Brechungsindex wie das Zsigmondysche Goldrubinglas benutzt und der Zwischenraum zwischen den beiden Gläsern von einer Flüssigkeit vom gleichen Brechungsindex ausgefüllt. Auf diese Art hatte die Welle, welche von dem leuchtenden Teilchen ausging, nur die einzige Brechung an der Kugelfläche der Linse zu erleiden. Die Rechnung ergibt nun, daß die Wellenoberfläche nach der Brechung keine vollständig konvexe Fläche ist, sondern in der Mitte eine Vertiefung besitzt, wodurch deren Hauptschnitte zwei Wendetangenten und für eine der Linsenachse benachbarte Richtung drei Pole erhalten. Die genauere Durchführung der Berechnung der Interferenzringe nach Vorgang von Mascart, wie wenn sie durch Wellen entstünden, die von jenen drei Polen ausgehen, ergab in der Tat die Lage der Interferenzen mit einer solchen Genauigkeit, wie man sie nicht anders erwarten durfte. Man muß sich dabei klar werden, daß die Mascartsche Methode nur eine Näherungsmethode

1) E. Mascart, Traité d'Optique **1.** p. 398 ff. 1889; **3.** p. 433 ff. (1893).

2) G. B. Airy, Transact. of the Cambridge Phil. Soc. 8. p. 379. 1839; Pogg. Ann., Erg.-Bd., p. 232. 1842.

darstellt, die besonders in der Mitte der Erscheinung zu keinem genauen Ergebnis führt. Da aber die genaue Durchführung nach dem Huyghensschen Prinzip zu außerordentlich mühsamen Rechnungen führt, deren Arbeit in keinem Verhältnis zu der Wichtigkeit des Ergebnisses gestanden hätte, so habe ich auf diese genaue Methode verzichtet. Ich betrachtete meine Aufgabe als erledigt, nachdem ich nachgewiesen hatte, daß die Verzerrung der Wellenoberfläche die merkwürdigen Interferenzerscheinungen erzeugt. Für eine über das erreichte Maß hinausgehende Genauigkeit lagen vorderhand weder theoretische noch praktische Gründe vor.

Obgleich somit das vorliegende Phänomen als dem Regenbogenphänomen verwandt nachgewiesen wurde, so glaube ich doch, daß es zum mindesten beim ersten Anblick erstaunlich erscheint, daß die Beugungserscheinungen, die wie hier aus Übereinanderdeckung von zweierlei Systemen zustande gekommen erscheinen, bereits durch Brechung an einer einzigen Kugelfläche erzeugt werden. Die Auffassung der Übereinanderdeckung zweier Interferenzerscheinungen ist dabei zudem berechtigt, da sie ja nach der Mascartschen Anschauung nicht durch zwei, sondern im vorliegenden Falle durch drei Wellen veranlaßt werden.

I. Teil.

Vergleich der im Ultramikroskop auftretenden und der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen.

1. Untersuchung über die Einstellung auf die geometrische Abbildungsebene.

Die erste praktische Frage, welche uns bei der Untersuchung der Erscheinungen entgegentritt ist die: Welches Bild erblickt man, wenn man das Mikroskop scharf auf die geometrische Abbildungsebene des Teilchens einstellt? Um diese Frage zu beantworten, bediente ich mich zweier Methoden.

Zunächst ritzte ich mit einem Diamanten in ein Zsigmondysches Goldrubinglas einen äußerst feinen, mit unbewaffnetem Auge kaum sichtbaren Strich ein und brachte das Präparat wenig geneigt unter das Objektiv. Das von der Seite einfallende Licht konnte bei dieser Anordnung nicht ins Objektiv gelangen, wohl aber das Licht, welches der Ritz

diffus zerstreute. Nachdem ich bei durchfallendem Lichte scharf eingestellt hatte, beleuchtete ich von der Seite her, wie es bei der Aufstellung des Ultramikroskops erforderlich ist. Da jetzt das Gesichtsfeld dunkel war, wurde die Erscheinung glänzender. Man sah wohl noch den scharfen Strich, aber er zerfiel in lauter kleine Scheibchen, die von einem dunklen und einem hellen Ringe umgeben waren. Verkleinerte ich den Abstand des Striches von der Linse, so wurde der Strich dadurch verwischt, daß sich um jedes Scheibchen neue Ringe lagerten.

Da ich aber noch nicht schließen durfte, daß der Strich aus ultramikroskopischen Pünktchen bestand, so suchte ich diese Methode noch einwandfreier zu machen, indem ich in die Ebene des Ritzes ultramikroskopische Teilchen brachte. Zu diesem Zwecke ritzte ich auf ein gewöhnliches Glas einen Strich ein, brachte darauf eine schwache Lösung von kolloidalem Eisenoxydhydrat und ließ das Wasser verdunsten. Jetzt mußten sich in der Ebene des Ritzes tatsächlich ultramikroskopische Teilchen befinden. Als ich nun das angefertigte Präparat wie vorher das Goldrubinglas montiert und ebenso wie vorher auf den Ritz eingestellt hatte, beobachtete ich bei seitlicher Beleuchtung den scharfen Strich, der über das ganze Gesichtsfeld hinweg von einer großen Zahl ultramikroskopischer Eisenoxyhydratteilchen umgeben war. Jedes dieser Teilchen zeigte ein inneres helles Scheibchen, das von zwei dunklen und einem hellen Ring umgeben war. Diese zweite Methode war auch noch insofern günstiger als die erste, als sie die Messung der Durchmesser der umgebenden Maxima und Minima gestattete. Das Resultat, das sich aus diesen Untersuchungen ergab, ist folgendes: *Die scharfe Einstellung auf die geometrische Abbildungsebene des Teilchens ist dann erreicht, wenn sich um das innerste helle Scheibchen noch ein weiteres Maximum lagert.*

2. Vergleich der Fraunhoferschen und der im Ultramikroskop auftretenden Beugungserscheinungen.

Da das I. Ringsystem mit den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen Ähnlichkeit besitzt, so vermutete ich zunächst, daß diese Ringe durch Beugung an den Blenden des Objektivs herrührten. Um diese Vermutung zu prüfen, berechnete ich

die Durchmesser der Ringe, die bei der Fraunhoferschen Anordnung durch Beugung an Kreisblenden auftreten, und maß die Ringe, wie sie im Ultramikroskop zustande kommen.

Um diese beiden Erscheinungen vergleichen zu können, war es notwendig, die ultramikroskopische Beobachtung so einzurichten, daß sie der Fraunhoferschen Anordnung entspricht, d. h. es muß auf die Blende *eine ebene oder sphärische Welle* einfallen und die Beobachtung muß im Unendlichen stattfinden. Dies läßt sich dadurch erreichen, daß man das leuchtende Teilchen in den Brennpunkt des Objektivs bringt, hinter dem Objektiv eine Blende befestigt und im Unendlichen beobachtet. Um diese Anordnung zu verwirklichen, verlängerte ich den Tubus des Mikroskops durch eine Röhre von ungefähr 900 mm Länge, die man sich als unendlich denken kann. Stellt man nun auf das Teilchen scharf ein, so hat man die Fraunhofersche Anordnung vor sich. Auf den verlängerten Mikroskoptubus wurde dann ein Okular mit einem durch Mikrometer verstellbaren Fadenkreuz aufgesetzt, mit dem man auf $^1/_{100}$ mm ablesen konnte. Der Abstand der geometrischen Abbildungsebene von der Blende wurde mit Hilfe eines Kathetometers auf 1 mm genau bestimmt, was einer Genauigkeit von $^1/_{10}$ Proz. entspricht. Die Fig. 1 gibt die Versuchsanordnung schematisch an.

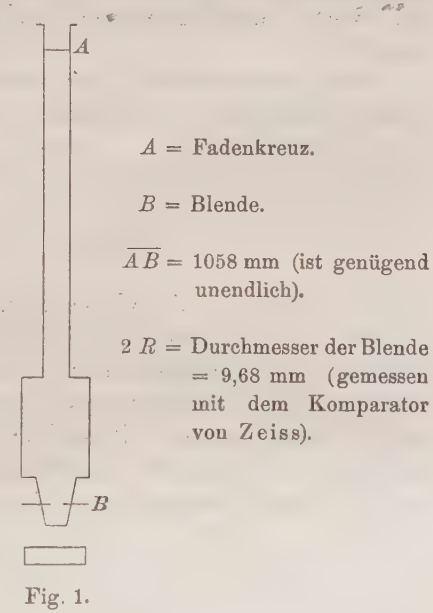

Fig. 1.

Zunächst stellte ich wie vorher schon auf das Glaspräparat mit dem Strich und den Eisenoxydhydratteilchen ein. Es zeigte sich dabei, daß die Erscheinung dieselbe war, wie bei dem Ultramikroskop in normaler Benutzung. Da die Ringe aber ziemlich lichtschwach waren, so benutzte ich für die ge-

nauen Messungen ein Goldrubinglas und erzielte damit bedeutend größere Intensitäten. Um vor allem zu zeigen, daß die Durchmesser der Ringe nur abhängig waren von den Dimensionen des Objektivs und nicht etwa von der Größe der Teilchen, führte ich die Messungen an sehr kleinen und sehr großen Teilchen aus, die man an den bedeutenden Intensitätsunterschieden erkannte. Was für Teilchen ich auch nahm, stets ergaben sich die gleichen Durchmesser der Ringe. Es wurden 50 verschiedene Ringe gemessen und jeder Durchmesser 20 mal bestimmt. Ausgeführt wurden die Messungen bei gelbem Licht von einer Wellenlänge von ungefähr 589 $\mu\mu$. Die Werte dieser Messungen sind in der Tab. 1 zusammengestellt.

Für die Berechnung der Minima bei der Fraunhoferschen Beugung an Kreisblenden gelten die Gleichungen[1])

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2R} \cdot 1{,}220,$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{\lambda}{2R} \cdot 2{,}233,$$

wobei φ_1 und φ_2 die Winkelhalbmesser der Minima, λ die Wellenlänge des Lichtes und R den Radius der Blende bedeutet. Um Experiment und Theorie vergleichen zu können, muß man diese Gleichungen so umformen, daß in ihnen anstatt der Winkelhalbmesser die wirklichen Durchmesser d_1 und d_2 vorkommen. Da φ_1 und φ_2 sehr kleine Winkel sind, so kann man sin durch tan ersetzen und man erhält sofort:

$$d_1 = \frac{2 \cdot [A\,B] \cdot \lambda \cdot 1{,}220}{2R},$$

$$d_2 = \frac{2 \cdot [A\,B] \cdot \lambda \cdot 2{,}233}{2R}.$$

Tabelle I.

	beobachtet	berechnet
d_1	0,34 ± 0,01	0,16
d_2	0,62 ± 0,01	0,29

1) A. Winkelmann, Handbuch d. Physik **6**, 2. p. 1074.

Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß die beobachteten und die berechneten Durchmesser durchaus verschieden sind. Die Abweichungen, die über 100 Proz. betragen, sind so groß, daß sie sich weder aus den Beobachtungsfehlern noch aus falschen Werten für die Wellenlänge des Lichtes erklären lassen. Allerdings wäre es denkbar, daß nicht die benutzte Blende, sondern die Fassung der Linse die wirksame Blende ist. Doch auch dieser Einwand ist hinfällig, da die Strahlen, die die Fassung treffen, infolge Totalreflexion an der Kugellinse nicht durchs Objektiv gehen und die eingesetzte Blende einen Teil der Strahlen abblendet, die durch das Objektiv hindurchgehen. Die auftretenden Beugungserscheinungen können also mit den Fraunhoferschen nicht identisch sein.

Bevor nun aber eine Erklärung dafür gegeben wird, soll zunächst untersucht werden, welchen Einfluß eine Veränderung der Blendengröße auf die Beugung im Ultramikroskop hat.

3. Einfluß der Blendengröße auf die Beugung im Ultramikroskop.

Um zu untersuchen, in welcher Weise sich die Ringe im Ultramikroskop beim Verkleinern der Blenden verändern, stellte ich mir eine Anzahl kreisrunder und rechteckiger Blenden von verschiedenen Größen her und setzte in B (Fig. 1) nach und nach immer kleinere und kleinere Blenden ein. Dabei zeigte sich, daß sich an den Durchmessern der Ringe zunächst nicht das geringste änderte, bis sie bei einer bestimmten Blendengröße ganz plötzlich sich vergrößerten und mit den aus der Theorie berechneten übereinzustimmen begannen. So waren die Ringdurchmesser bei einem Blendendurchmesser von 4,52 mm noch die gleichen wie vorher, während bei 4,09 mm die Ringe die Werte annahmen, wie sie die Tab. 2 angibt.

Tabelle 2.

	beobachtet	berechnet
d_1	0,40 ± 0,01	0,37
d_2	0,71 ± 0,01	0,67

Die jetzt auftretenden Abweichungen sind nur noch gering. Die Übereinstimmung nimmt sogar noch zu, wenn man noch kleinere Blenden einsetzt.

Eine weitere wichtige Tatsache ergab sich noch bei diesen Versuchen. Waren die Blendendurchmesser groß, so zeigte sich bei Verkleinerung des Abstandes des leuchtenden Teilchens vom Objektiv das Ringsystem II, während es bei kleinen Blenden wegblieb. Die ganze Erscheinung verschwand nach und nach. Noch augenfälliger wurde das Verhalten der Beugungserscheinung beim Einsetzen der Rechtecksblenden. Bei großen Rechtecken zeigte sich wohl eine Verzerrung der Ringe, aber der Ringtypus blieb bestehen und es trat nicht die Beugungsfigur des Rechteckes auf. Dies wurde anders, wenn man kleine Recktecke als Blenden benutzte. Man erhielt dann in der Tat das Beugungsbild des Rechteckes.

Aus allen diesen Versuchen geht hervor, daß die Blenden erst bei genügender Kleinheit Einfluß auf die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop haben, daß sie also keineswegs die ausschlaggebenden Faktoren für das Zustandekommen der Interferenzringe sind.

II. Teil.

Mathematische Entwickelungen.

Da wir gesehen haben, daß die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop in erster Linie nicht durch die Blenden im Objektiv bedingt sind, so soll der bereits in der Einleitung angedeutete Gedanke weiter durchgeführt werden, indem die Beugung durch eine deformierte Wellenoberfläche erzeugt gedacht wird. Es ergibt sich dann der Gang der Untersuchung wie folgt.

Wir nehmen an, daß von einem leuchtenden Punkte, dem ultramikroskopischen Teilchen, eine Kugelwelle ausgehe und an einer einzigen Kugeloberfläche gebrochen werde. Durch die austretenden Strahlen wird dann eine neue, nicht mehr kugelförmige Wellenoberfläche bestimmt, die als Ausgang einer neuen Lichterregung angesehen wird. In den zu beobachtenden Punkten, die bei der Betrachtung durch ein Fernrohr im Unendlichen liegen, ist diese Lichterregung zu berechnen. Wie

schon erwähnt, führt diese Aufgabe auf das gleiche Problem, wie die Bestimmung der überzähligen Bogen beim Regenbogenphänomen, die von Airy genau und von Mascart angenähert behandelt worden ist. Bei meiner Untersuchung benutze ich die Mascartsche Methode unter Zugrundelegung der genauen Wellengleichung, da die exakte Durchführung die Auswertung äußerst komplizierter Doppelintegrale bedingt. Daß sich dadurch beim Regenbogenproblem außerordentlich gute Resultate ergeben, zeigte Dr. Möbius in seiner Dissertation[1]), an die ich mich bei der Behandlung der vorliegenden Aufgabe eng anschließen werde.

1. Die Gleichung für den austretenden Strahl.

In Fig. 2 gibt AED den Gang eines Strahles in einer Normalebene an.

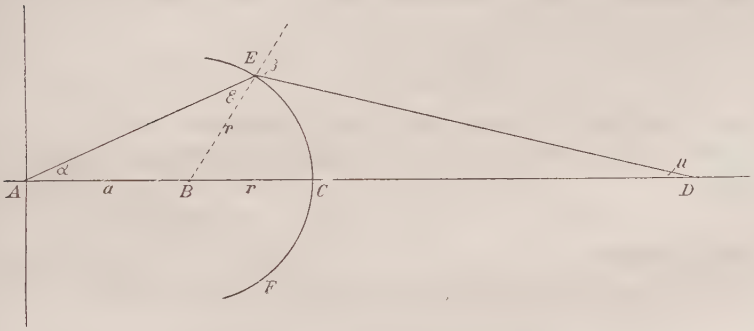

Fig. 2.

Es sei A der leuchtende Punkt, von dem die Strahlen ausgehen. Diese bilden mit dem Zentralstrahl $ABCD$ den Winkel α, treffen auf die brechende Fläche ECF unter dem Winkel ε, verlassen sie unter dem Winkel β und bilden schließlich mit dem Zentralstrahl den Winkel μ. Ferner bedeutet a den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt der Linse, r den Radius dieser Linse und n ihren Brechungsindex

1) W. Möbius, Zur Theorie des Regenbogens und ihrer experimentellen Prüfung. Dissertation, abgedruckt im 30. Bd. der Abhandl. d. math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Nr. 2.

gegen Luft. Für die ganze weitere Entwickelung sei der Winkel α die unabhängige Veränderliche.

Nach dem Sinusbrechungsgesetze folgt dann sofort:

$$\sin \varepsilon = \frac{a}{r} \sin \alpha, \tag{1}$$

$$\sin \beta = n \sin \varepsilon = \frac{n a}{r} \sin \alpha, \tag{2}$$

$$\mu = \pi + \alpha + \varepsilon - \beta. \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Differentiation

$$d\mu = d\alpha + d\varepsilon - d\beta, \tag{3a}$$

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = 1 + \frac{a}{r} \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon} - \frac{n a}{r} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \tag{3b}$$

Für die analytische Behandlung des Problems ist ein Koordinatensystem einzuführen, und zwar sei der Zentralstrahl die X-Achse und die auf ihm im Punkte A errichtete Normale die Y-Achse. Die Koordinaten von E sind dann

$$\begin{cases} a + r \cos(\alpha + \varepsilon), \\ r \sin(\alpha + \varepsilon). \end{cases}$$

Die Gleichung des aus der Kugel tretenden Strahles, der durch E geht und mit der X-Achse den Winkel μ bildet, lautet:

$$y - r \sin(\alpha + \varepsilon) = tang\, \mu \,.\, \big(x - a - r \cos(\alpha + \varepsilon)\big),$$

oder geordnet:

$$f(\alpha) \equiv x \sin \mu - y \cos \mu - a \sin \mu - a n \sin \alpha = 0. \tag{4}$$

2. Die Gleichung der Brennlinie.

Die Gleichung (4) enthält den Parameter α, durch dessen stetige Veränderung von $+\alpha$ bis $-\alpha$ wir die Schar aller Lichtstrahlen erhalten. Die Einhüllende dieser Schar, die Brennlinie, ist dann definiert durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0, \\ \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Führt man die Differentiation nach α aus, so erhält man, wenn man unter μ' die erste Ableitung von μ nach α versteht:

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = x \cos \mu \, \mu' + y \sin \mu \, \mu' - a \cos \mu \, \mu' - a n \cos \alpha = 0. \tag{5}$$

Durch Ausrechnung von x und y aus den beiden Gleichungen (4) und (5) ergeben sich die Koordinaten x und y der Brennlinie.

$$\begin{array}{lll} (4) & x\sin\mu - y\cos\mu - a\sin\mu - an\sin\alpha = 0 & \mid .\sin\mu\,\mu' \mid .\cos\mu\,\mu' \\ (5) & x\cos\mu\,\mu' + y\sin\mu\,\mu' - a\cos\mu\,\mu' - an\cos\alpha = 0 & \mid .\cos\mu \mid .\sin\mu \end{array}$$

$$x\sin^2\mu\,\mu' - y\sin\mu\cos\mu\,\mu' - a\sin^2\mu\,\mu' - an\sin\mu\sin\alpha\,\mu' = 0$$

$$x\cos^2\mu\,\mu' + y\sin\mu\cos\mu\,\mu' - a\cos^2\mu\,\mu' - an\cos\mu\cos\alpha = 0$$

$$x\mu' + a\mu' - an\sin\mu\sin\alpha\,\mu' - an\cos\alpha\cos\mu = 0$$

$$x\sin\mu\cos\mu\,\mu' - y\cos^2\mu\,\mu' - a\sin\mu\cos\mu\,\mu' - an\sin\alpha\cos\mu\,\mu' = 0$$

$$x\sin\mu\cos\mu\,\mu' + y\sin^2\mu\,\mu' - a\sin\mu\cos\mu\,\mu' - an\cos\alpha\sin\mu = 0$$

$$y\mu' + an\sin\alpha\cos\mu\,\mu' - an\cos\alpha\sin\mu = 0.$$

$$(6) \qquad \begin{cases} x = an\cos\alpha\cos\mu\dfrac{d\alpha}{d\mu} + an\sin\alpha\sin\mu + a, \\ y = an\cos\alpha\sin\mu\dfrac{d\alpha}{d\mu} - an\sin\alpha\cos\mu. \end{cases}$$

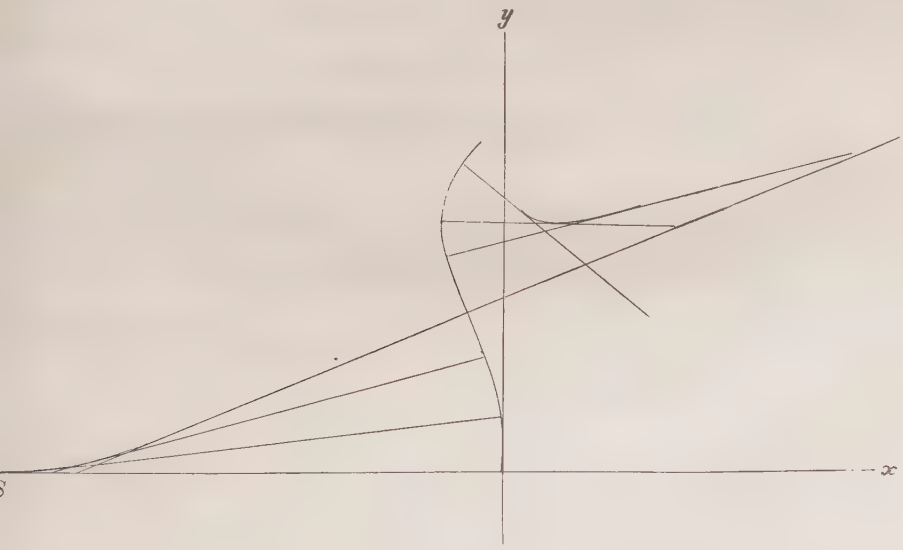

Fig. 3.

In Fig. 3 ist eine solche Brennlinie gezeichnet. Die Abbildung ist jedoch keine ähnliche, da man die Winkeldifferenzen, die nur Minuten betragen, nicht hätte einzeichnen

können. Die Abbildung ist so gewählt, daß in Richtung der X-Achse eine andere Vergrößerung ist als in Richtung der Y-Achse.

3. Die Gleichung für die Bogenlänge der Brennlinie.

Das Bogenelement ds der Brennlinie bildet mit der X-Achse den Winkel μ, daher ist

$$ds = dx\cos\mu + dy\sin\mu. \tag{7}$$

Um s selbst zu berechnen, ist dx und dy zu bestimmen, und die Gleichung (7) zu integrieren. Differentiiert man die Gleichungen (6), so erhält man:

$$dx = a\,n\,d\left(\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\mu}\right)\cos\mu - a\,n\cos\alpha\sin\mu\frac{d\alpha}{d\mu}d\mu + a\,n\cos\alpha\sin\mu\,d\alpha + a\,n\sin\alpha\cos\mu\,d\mu,$$

$$dy = a\,n\,d\left(\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\mu}\right)\sin\mu + a\,n\cos\alpha\cos\mu\frac{d\alpha}{d\mu}d\mu - a\,n\cos\alpha\cos\mu\,d\alpha + a\,n\sin\alpha\sin\mu\,d\mu.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos\mu$, die zweite mit $\sin\mu$, und addiert man, so folgt

$$\frac{ds}{a\,n} = d\left(\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\mu}\right) + \sin\alpha\,d\mu. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck (8) ist noch auf eine integrierbare Form zu bringen.

$d\left(\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\mu}\right)$ ist ohne weiteres integrierbar.

Nach Gleichung (3a) ist

$$d\mu = dx + d\varepsilon - d\beta.$$

Durch Multiplikation mit $\sin\alpha$ folgt

$$\sin\alpha\,d\mu = \sin\alpha\,d\alpha + \sin\alpha\,d\varepsilon - \sin\beta\,d\beta.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte aus den Gleichungen (1) und (2) ein, so folgt:

$$\sin\alpha\,d\mu = \sin\alpha\,d\alpha + \frac{r}{a}\sin\varepsilon\,d\varepsilon - \frac{r}{a\,n}\sin\beta\,d\beta.$$

In dieser Gleichung sind sämtliche Glieder integrierbar. Der Ausdruck (8) geht dann über in den folgenden:

$$\frac{ds}{an} = d\left(\cos\alpha \frac{d\alpha}{d\mu}\right) + \sin\alpha\, d\alpha + \frac{r}{a}\sin\varepsilon\, d\varepsilon - \frac{r}{an}\sin\beta\, d\beta .$$

Wir integrieren nun von 0 bis $+\alpha$

$$\int_0^{\alpha} \frac{ds}{an} = \int_0^{\alpha} d\left(\cos\alpha \frac{d\alpha}{d\mu}\right) + \int_0^{\alpha} \sin\alpha\, d\alpha + \int_0^{\varepsilon} \frac{r}{a}\sin\varepsilon\, d\varepsilon - \int_0^{\beta} \frac{r}{an}\sin\beta\, d\beta,$$

$$\frac{s}{an} = \left[\cos\alpha \frac{d\alpha}{d\mu} - \cos\alpha - \frac{r}{a}\cos\varepsilon + \frac{r}{an}\cos\beta\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha},$$

(9) $$\frac{s}{an} = \cos\alpha \frac{d\alpha}{d\mu} - \cos\alpha - \frac{r}{a}\cos\varepsilon + \frac{r}{an}\cos\beta - b,$$

wobei b den Ausdruck bedeutet

(10) $$b = \frac{r}{r + a - an} - 1 - \frac{r}{a} + \frac{r}{an},$$

da

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = 1 + \frac{a\cos\alpha}{r\cos\varepsilon} - \frac{an\cos\alpha}{r\cos\beta},$$

$$\left(\frac{d\mu}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1 + \frac{a}{r} - \frac{an}{r} = \frac{r + a - an}{r},$$

$$\left(\frac{d\alpha}{d\mu}\right)_{\alpha=0} = \frac{r}{r + a - an}.$$

Die Bogenlänge der Brennlinie ist also von der Spitze S an gerechnet.

4. Die Gleichung der Wellenlinie.

Zu ein und derselben Brennlinie gibt es eine unendliche Anzahl von Wellenlinien. Wir wollen eine Wellenlinie betrachten, deren Schnitt mit der X-Achse den Abstand d von der Spitze S der Brennlinie haben möge. Da diese Spitze in Richtung der negativen X-Achse liegt, so haben wir d negativ anzusetzen. Die Wellenlinie ist nun aber die Evolute der Brennlinie und jeder Lichtstrahl ist zugleich Tangente der Brennlinie und Normale der Wellenlinie. Es ist also auf

jedem Lichtstrahl die Strecke zwischen Brennlinie und Wellenlinie $-d+s$, deren Projektion auf die Koordinatenachsen die Koordinaten ξ, η eines Punktes der Wellenlinie ergibt. Wir erhalten demnach

$$x-\xi=(-d+s)\cos\mu,$$
$$y-\eta=(-d+s)\sin\mu.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werte von x und y aus (6) ein und löst nach ξ und η auf, so folgt:

$$(12)\quad \begin{cases} \xi = a\,n\sin\alpha\sin\mu \\ \quad +(a\,n\cos\alpha+r\,n\cos\varepsilon-r\cos\beta+a\,n\,b+d)\cos\mu+a, \\ \eta = -a\,n\sin\alpha\cos\mu \\ \quad +(a\,n\cos\alpha+r\,n\cos\varepsilon-r\cos\beta+a\,n\,b+d)\sin\mu. \end{cases}$$

Für die numerische Berechnung wird dann d so bestimmt, daß für $\alpha=0$ die Klammer

$$(a\,n\cos\alpha+r\,n\cos\varepsilon-r\cos\beta+a\,n\,b+d)$$

verschwindet. Es ergibt sich für $\alpha=0$

$$(\xi-a)=0 \quad \text{und} \quad \eta=0.$$

Das heißt aber: Die für die Berechnung zugrunde gelegte Wellenlinie geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Die Wendepunkte der Wellenlinie, die sich aus der Gleichung $d\mu/d\alpha=0$ ergeben würden, explizit darzustellen, ist mir nicht gelungen, da durch Auftreten von Quadratwurzeln der Grad der Gleichung in α so hoch wird, daß ihre Auflösung unmöglich wird.

5. Das Bogenelement $d\sigma$ der Wellenlinie.

Das Bogenelement $d\sigma$ der Wellenlinie schließt mit der X-Achse den Winkel $\mu-\pi/2$ ein. Demnach ist

$$d\sigma=d\xi\cos\left(\mu-\frac{\pi}{2}\right)+d\eta\sin\left(\mu-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(13)\qquad d\sigma=d\xi\sin\mu-d\eta\cos\mu.$$

Bildet man nun aus den Gleichungen (12) $d\xi$ und $d\eta$, multipliziert $d\xi$ mit $\sin\mu$ und $d\eta$ mit $\cos\mu$ und subtrahiert diese beide Gleichungen voneinander, so folgt:

$$
\begin{aligned}
d\xi = \; & a\,n\cos\alpha\sin\mu\,d\alpha + a\,n\sin\alpha\cos\mu\,d\mu \\
& - (a\,n\sin\alpha\,d\alpha + r\,n\sin\varepsilon\,d\varepsilon - r\sin\beta\,d\beta)\cos\mu \\
& - (a\,n\cos\alpha + r\,n\cos\varepsilon - r\cos\beta + a\,n\,b + d)\sin\mu\,d\mu,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\eta = \; & - a\,n\cos\alpha\cos\mu\,d\alpha + a\,n\sin\alpha\sin\mu\,d\mu \\
& - (a\,n\sin\alpha\,d\alpha + r\,n\sin\varepsilon\,d\varepsilon - r\sin\beta\,d\beta)\sin\mu \\
& + (a\,n\cos\alpha + r\,n\cos\varepsilon - r\cos\beta + a\,n\,b + d)\cos\mu\,d\mu,
\end{aligned}
$$

$$
d\sigma = a\,n\cos\alpha\,d\alpha - (a\,n\cos\alpha + r\,n\cos\varepsilon - r\cos\beta + a\,n\,b + d)\,d\mu.
$$

Dividiert man diese Gleichung durch $d\alpha$ und setzt für $d\mu/d\alpha$ den Wert (3b) ein, so erhält man:

$$
(14)\quad \left\{ \frac{d\sigma}{d\alpha} = a\,n\cos\alpha - (a\,n\cos\alpha + r\,n\cos\varepsilon - r\cos\beta + a\,n\,b + d)\,\frac{r\cos\varepsilon\cos\beta + a\cos\alpha\cos\beta - a\,n\cos\alpha\cos\varepsilon}{r\cos\varepsilon\cos\beta}. \right.
$$

6. Die auf einem Elemente df der Wellenfläche vorhandene Schwingungsamplitude.

Die vom leuchtenden Punkte ausgehende sphärische Welle besitzt in allen ihren Elementen die gleiche Schwingungsamplitude. Dasselbe gilt aber nicht mehr ohne weiteres für die Wellenfläche, die nach der Brechung an der Kugelfläche entsteht, da das Licht bei der Brechung geschwächt wird. Nach Fresnel verfährt man bei der Berechnung dieser Schwächung so, als ob die eine Hälfte des ankommenden Lichtes in der Einfallsebene, die andere senkrecht zu ihr polarisiert wäre. Es sei L die Lichtstärke in df, dem Flächenelemente der austretenden Welle, L' die in df' der einfallenden Kugelwelle, das von denselben Strahlen wie df begrenzt wird. Das Licht wird durch die Brechung geschwächt und zwar bleibt nach Fresnel nur der Teil

$$
(15)\qquad 1 - C^2
$$

übrig, wobei

$$
C = \frac{\sin(\beta - \varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)} \quad \text{oder} \quad = \frac{tan(\beta - \varepsilon)}{tan(\beta + \varepsilon)},
$$

je nachdem wir den Teil nehmen, der in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr als polarisiert gedacht wird. Außer-

dem verhalten sich L und L' umgekehrt wie die zugehörigen Flächenelemente df und df'. Wir erhalten demnach

$$l = L : L' = \frac{df'(1 - C^2)}{df}. \tag{16}$$

Es gilt nun noch df und df' zu berechnen. Die Wellenfläche entsteht durch Rotation der Wellenlinie um die X-Achse. Der Drehwinkel sei ω. Sind ferner die Koordinaten der Wellenfläche ξ', η', ζ', so ist:

$$\begin{cases} \xi' = \xi, \\ \eta' = \eta \cos \omega, \\ \zeta' = \eta \sin \omega. \end{cases} \tag{17}$$

Bei der Rotation sind die Wellenlinien die Meridiankurven, während die Bahnen der Wellenlinie die Parallelkreise sind. Als Oberfläche df nehmen wir das Rechteck zwischen zwei benachbarten Parallelkreisen p_1 und p_2 und zwischen zwei benachbarten Meridiankurven W_1 und W_2 mit den Seiten $d\sigma$ und $\eta\, d\omega$. df' liegt zwischen denselben ω-Ebenen, ist ebenfalls ein Rechteck und hat die Seiten

$$a\, d\alpha \quad \text{und} \quad a \sin \alpha\, d\omega.$$

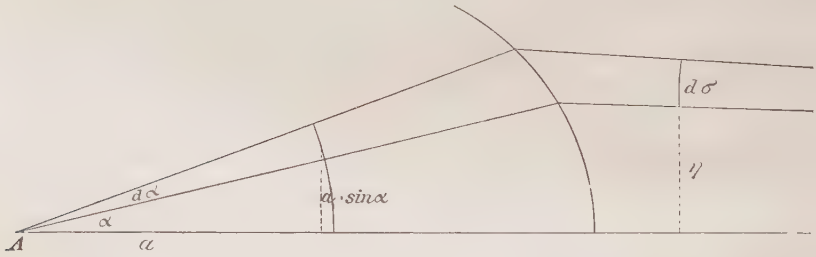

Fig. 4.

Wir erhalten also:

$$df = \eta\, d\omega\, d\sigma, \tag{18a}$$

$$df' = a\, d\alpha \,.\, a\, d\omega. \tag{19a}$$

Für die auf dem Flächenelemente der Wellenlinie vorhandene Schwingungsamplitude folgt dann

$$l = \frac{a^2 \sin \alpha (1 - C^2)}{\eta \dfrac{d\sigma}{d\alpha}}. \tag{20}$$

Wir haben nun alle Größen berechnet, um die in einem beliebigen Punkte P auftretende Lichterregung zu bestimmen. Um dies durchzuführen, braucht man nur von den zu beobachtenden Punkten aus über die ganze Wellenoberfläche zu integrieren und erhält dann in ihnen streng die Lichtintensität mit den zugehörigen Phasen. Da aber die Mascartsche Methode viel rascher zum Ziele führt und hinreichend gute Werte liefert, so soll auf die Integration verzichtet werden.

7. Die Mascartsche Formel.

Wenn man die Lichtstärke in irgend einem Punkte berechnen will, so ergibt sich hier das gleiche Problem wie bei der Theorie des Regenbogens. Wie dort Streifensysteme infolge der Deformation von Kugelwellen auftreten, so werden auch im vorliegenden Falle durch Deformation der ursprünglich sphärischen Welle Phasendifferenzen entstehen, durch die abwechselnd helle und dunkle Ringe erzeugt werden. Nach Mascart denkt man sich die Streifen erzeugt durch Interferenz der von den Polen der Wellenfläche in Richtung der Normalen ausgehenden Lichtstrahlen. Beim Regenbogenproblem ergeben sich nun zwei Wendepunkte und folglich drei Pole, von denen aber der eine infolge geringer Lichtintensität nicht in Betracht kommt. Im vorliegenden Falle treten auch zwei Wendepunkte und drei Pole auf, von denen aber keiner zu vernachlässigen ist, da alle drei Pole, wie sich aus einer später folgenden Tab. 3 (p. 203) ergeben wird, annähernd gleiche Intensitäten besitzen. Es muß daher die Beugung durch Interferenz dreier Wellenzüge erzeugt gedacht werden. Ist A die resultierende, a_1, a_2, a_3 die in den Polen vorhandene Amplitude, so erhält man durch Zusammensetzen dieser drei Schwingungen

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_1\,a_2 \cos\delta_{12} + 2\,a_1\,a_3 \cos\delta_{13} + 2\,a_2\,a_3 \cos\delta_{23},$$

wobei δ_{12}, δ_{13}, δ_{23} die Phasendifferenzen der drei Lichtstrahlen bedeuten. Nun hat Mascart gezeigt, daß sich bei Zusammensetzung zweier Schwingungen in dieser Weise die Intensität falsch ergibt. Sie wird dagegen richtig, wenn man zu den Phasendifferenzen in den beiden Polen, in denen die Krümmung

der Wellenlinie verschiedenes Vorzeichen hat, eine Phasenverzögerung von $\pi/2$ annimmt. Wollen wir also die Mascartsche Formel in ihrer Erweiterung anwenden, so müssen wir für die Pole, in denen die Krümmung der Wellenlinie verschiedenes Vorzeichen hat, noch eine Phasenverzögerung von

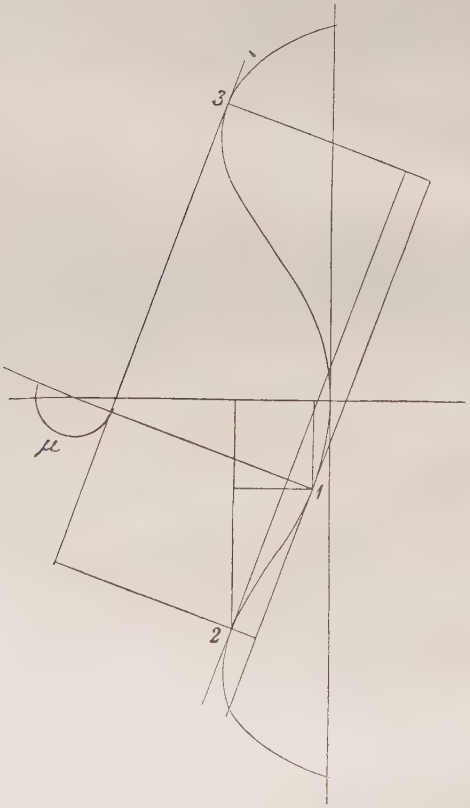

Fig. 5.

$\pi/2$ ansetzen. Die genauere Begründung für dieses Verfahren wird von Hrn. Dr. Möbius demnächst veröffentlicht werden.

In Fig. 5 ist eine Wellenlinie gezeichnet und zwar in derselben Verzerrung wie in Fig. 3. Es ergibt sich dann für die erweiterte Mascartsche Formel:

(21)
$$\begin{cases} J = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_1\,a_2 \sin\delta_{12} \\ \qquad + 2\,a_1\,a_2 \sin\delta_{13} + 2\,a_2\,a_3 \cos\delta_{23}\,, \end{cases}$$

wobei

$$\delta_{12} = \frac{2\,\pi\,\Delta_{12}}{\lambda}\,,$$

$$\delta_{13} = \frac{2\,\pi\,\Delta_{13}}{\lambda}\,,$$

$$\delta_{23} = \frac{2\,\pi\,\Delta_{23}}{\lambda}$$

zu setzen ist, wenn Δ die geometrische Wegedifferenz der Pole, d. h. der Abstand der zu den Polen gehörigen Tangentialebenen ist.

Bevor wir nun die Gleichung (21) weiter vereinfachen können, ist es notwendig, die in den Polen auftretenden Schwingungsamplituden zu berechnen. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung (20). Die folgende Tab. 3 zeigt den Verlauf der Schwingungsamplituden für den Fall $a = 5{,}680$ mm (a = Abstand des leuchtenden Teilchens vom Mittelpunkt der brechenden Linse).

Tabelle 3.

α	Sinusanteil	Tangensanteil	α	Sinusanteil	Tangensanteil
0°	0,42	0,42	11°	0,42	0,44
1	0,42	0,42	12	0,42	0,45
2	0,42	0,42	13	0,41	0,46
3	0,42	0,43	14	0,41	0,47
4	0,42	0,43	15	0,41	0,48
5	0,42	0,43	16	0,40	0,47
6	0,42	0,43	17	0,39	0,45
7	0,42	0,43	18	0,38	0,42
8	0,42	0,44	19	0,34	0,39
9	0,42	0,44	20	0,23	0,36
10	0,42	0,44	20°25′38″	0	0

Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß die Amplituden längs der Wellenlinie sowohl für den Sinus als auch für den Tangensanteil als konstant angesehen werden können. Für die Mascartsche Formel kommen ja überhaupt nur die Winkel $\alpha = 0$ bis $\alpha = 5°30'$ in Betracht. Da sich ferner die beiden Anteile

nur wenig unterscheiden, so können die beiden durch sie erzeugten Ringsysteme nur ganz geringe Differenzen aufweisen. Wir brauchen also für die beiden Anteile die Ringsysteme nicht besonders zu berechnen, sondern können gleich von vornherein die Amplituden auf der Wellenfläche konstant annehmen. Wir setzen die Amplituden gleich 1, da es ja nur auf die verhältnismäßigen Lichtintensitäten ankommt. Die Gleichung (21) geht dann über in die Gleichung

$$J = 3 + 2\,[\sin\delta_{12} + \sin\delta_{13} + \cos(\delta_{13} - \delta_{12})]\,.$$

Dieser Ausdruck ist für die numerische Berechnung noch ziemlich unbequem. Es soll daher die Summe in der Klammer in ein Produkt verwandelt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
J &= 3 + 2\left[2\sin\frac{\delta_{12}+\delta_{13}}{2}\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2} + \cos^2\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\right.\\
&\qquad\qquad\left. - 1 + \cos^2\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\right],\\
&= 3 + 2\left[2\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\left(\sin\frac{\delta_{12}+\delta_{13}}{2} + \cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\right) - 1\right],\\
&= 1 + 2\left[2\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\left(\sin\frac{\delta_{12}+\delta_{13}}{2} + \sin\frac{180-(\delta_{12}-\delta_{13})}{2}\right)\right],\\
&= 1 + 2\left[2\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\,2\sin\frac{\frac{\delta_{12}+\delta_{12}}{2} + \frac{180-(\delta_{12}-\delta_{13})}{2}}{2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\cos\frac{\frac{\delta_{12}+\delta_{13}}{2} - \frac{180-(\delta_{12}-\delta_{13})}{2}}{2}\right],\\
&= 1 + 8\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\sin\frac{180+2\,\delta_{13}}{4}\cos\frac{180-2\,\delta_{12}}{4},\\
&= 1 + 8\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}\sin\left(45+\frac{\delta_{12}}{2}\right)\cos\left(45-\frac{\delta_{12}}{2}\right),\\
&= 1 + 8\sin\left(45+\frac{\delta_{12}}{2}\right)\sin\left(45+\frac{\delta_{13}}{2}\right)\cos\frac{\delta_{12}-\delta_{13}}{2}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun noch für δ_{12} und δ_{13} die entsprechenden Werte ein, so ergibt sich schließlich

$$(22)\quad J = 1 + 8\sin\left(45 + \frac{2\pi\frac{\Delta_{12}}{2}}{\lambda}\right)\sin\left(45 + \frac{2\pi\frac{\Delta_{13}}{2}}{\lambda}\right)\cos\frac{2\pi\frac{\Delta_{23}}{2}}{\lambda}.$$

8. Die Berechnung der Δ.

Es sind nun zunächst die geometrischen Wegdifferenzen der Pole der Wellenlinie zu berechnen. Aus Fig. 5 folgt rein geometrisch, da für die Pole zu einem bestimmten μ drei verschiedene α, ε und β gehören:

$$\begin{aligned}\Delta_{12} = &\quad (\xi_1 - \xi_2)\cos(\mu - \pi) - (\eta_2 - \eta_1)\sin(\mu - \pi)\\ = &- (\xi_1 - \xi_2)\cos\mu \quad + (\eta_2 - \eta_1)\sin\mu\,.\end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte für ξ und η aus den Gleichungen (12) ein, so erhält man

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta_{12} = a\,n(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + r\,n(\cos\varepsilon_2 - \cos\varepsilon_1)\\ - r(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)\,.\end{aligned}\right.$$

Nun ist aber Δ_{12} klein gegenüber den Gliedern, aus denen es sich zusammensetzt. Da es aber gerade auf eine große Genauigkeit der Δ ankommt, so wäre die Berechnung der einzelnen Summanden auf viele Dezimalstellen notwendig. Um dies zu vermeiden, soll versucht werden auch diese Summe in ein Produkt zu verwandeln.

Aus Gleichung (3) folgt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ die zu einem μ gehörigen Winkel bedeuten:

$$\pi + \alpha_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 = \pi + \alpha_2 + \varepsilon_2 - \beta_2\,,$$

oder

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = (\beta_2 - \beta_1)\,.$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$x_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}, \quad y_1 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2}, \quad z_1 = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2},$$

$$x_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, \quad y_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, \quad z_2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 &= -2\sin x_1 \sin x_2\,,\\ \cos\varepsilon_2 - \cos\varepsilon_1 &= -2\sin y_1 \sin y_2\,,\\ \cos\beta_2 - \cos\beta_1 &= -2\sin z_1 \sin z_2\,,\end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) folgt:

$$\sin \alpha_2 = \frac{r}{a} \sin \varepsilon_2 ,$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{r}{a} \sin \varepsilon_1 ,$$

$$\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 = \frac{r}{a} (\sin \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1),$$

$$r = a \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1} . \tag{24a}$$

Aus Gleichung (2) folgt:

$$\sin \alpha_2 = \frac{r}{a n} \sin \beta_2 ,$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{r}{a n} \sin \beta_1 ,$$

$$\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 = \frac{r}{a n} (\sin \beta_2 + \sin \beta_1).$$

$$r = a n \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \beta_2 + \sin \beta_1} . \tag{24b}$$

Setzt man den Wert für r aus Gleichung (24a) in das zweite Glied, den Wert für r aus (24b) in das dritte Glied der Gleichung (23) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= -2 a n \left[\sin x_1 \sin x_2 + \sin y_1 \sin y_2 \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1} \right. \\ &\qquad \left. - \sin z_1 \sin z_2 \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1}{\sin \beta_2 + \sin \beta_1} \right], \\ &= -2 a n \left[\sin x_1 \sin x_2 + \sin y_2 \frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos y_2} - \sin z_2 \frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos z_2} \right], \\ &= -\frac{2 a n \sin x_1}{\cos y_2 \cos z_2} [\sin x_2 \cos y_2 \cos z_3 + \cos x_2 \sin y_2 \cos z_2 \\ &\qquad - \cos x_2 \cos y_2 \sin z_2] . \end{aligned}$$

Die Klammer kann noch weiter vereinfacht werden. Sie nimmt die folgende Gestalt an

$$[\ldots] = \cos z_2 \sin (x_2 + y_2) - \cos x_2 \cos y_2 \sin z_2 ,$$

da aber $z_2 = x_2 + y_2$, so folgt

$$\begin{aligned} [\ldots] &= \sin (x_2 + y_2) \cos (x_2 + y_2) - \cos x_2 \cos y_2 \sin (x_2 + y_2), \\ &= \sin (x_2 + y_2) \{\cos (x_2 + y_2) - \cos x_2 \cos y_2\}, \\ &= \sin (x_2 + y_2) \{\cos x_2 \cos y_2 - \sin x_2 \sin y_2 - \cos x_2 \cos y_2\}, \\ &= -\sin (x_2 + y_2) \sin x_2 \sin y_2 = -\sin x_2 \sin y_2 \sin z_2 . \end{aligned}$$

Wir erhalten also, wenn wir an Stelle der Klammer den umgeformten Ausdruck einsetzen:

$$\Delta_{12} = 2\,a\,n \sin x_1 \sin x_2 \tan y_2 \tan z_2 .$$

Die drei verschiedenen Δ sind also definiert durch die Gleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} \Delta_{12} = 2\,a\,n \sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_1}{2} \sin\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2} \tan\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2} \tan\dfrac{\beta_2-\beta_1}{2}, \\ \Delta_{23} = 2\,a\,n \sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_2}{2} \sin\dfrac{\alpha_3-\alpha_2}{2} \tan\dfrac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{2} \tan\dfrac{\beta_3-\beta_1}{2}, \\ \Delta_{13} = \Delta_{12} + \Delta_{23} . \end{cases}$$

III. Teil.

Experimentelle Bestimmung der Konstanten, Messungen und numerische Rechnung.

1. Der Abstand des leuchtenden Teilchens von dem Mittelpunkt der Linse.

Um Theorie und Experiment vergleichen zu können, ist es notwendig, den Abstand a des leuchtenden Teilchens von dem Mittelpunkt der Linse zu bestimmen, da sich die Beugungserscheinungen im Ultramikroskop mit diesem Abstand ändern. Es ist nun aber nicht gelungen, diesen Abstand direkt zu messen, da das leuchtende Teilchen innerhalb des Goldrubinglases liegt und es auf eine große Genauigkeit ankommt. Ich mußte daher eine indirekte Methode anwenden.

Bei scharfer Einstellung auf das Teilchen muß es bei der Beobachtung im Unendlichen im Brennpunkte des Objektivs liegen. Durch Berechnung der Brennweite findet man ein a, das dem für die Rechnung zugrunde gelegten ziemlich nahe kommen muß. Die Beugungserscheinung wird komplizierter, wenn man diesen Abstand verkleinert. Für ein a, das etwas kleiner ist, als die gefundene Brennweite, berechnete ich auf Grund der im 2. Abschnitte entwickelten Formeln die Beugungserscheinungen und stellte auf ein Ringsystem ein, deren Durchmesser mit den berechneten übereinstimmte. Auf diese Weise hatte ich ein ganz bestimmtes a gefunden. Ich verkleinerte nun das a um einen Betrag, den ich mit Hilfe der Mikrometerschraube am Mikroskoptubus auf $^1/_{1000}$ mm messen konnte. Für dieses neue a bestimmte ich nun die Durchmesser der

Beugungsringe theoretisch und experimentell. War die Theorie richtig, so mußten die berechneten und beobachteten Werte übereinstimmen, was sich auch schließlich ergab.

2. Der Radius der brechenden Kugellinse.

Bei allen weiteren Versuchen wurde als Objektiv eine von der Firma Zeiss hergestellte Linse benutzt, die die Form einer Halbkugel haben sollte. Es galt nun den Radius dieser Linse zu bestimmen. Mit Hilfe eines Komparators maß ich zunächst den Durchmesser des Frontkreises der Linse auf tausendstel mm genau. Unter Voraussetzung einer vollkommenen Halbkugel wäre damit der Radius der Linse bestimmt gewesen. Dies konnte ich aber nicht ohne weiteres annehmen, und mußte daher eine Vergleichsmessung anstellen. Die Methode, die ich anwendete, ist die in der Dissertation von Dr. Möbius auf p. 186 erwähnte, und besteht darin, daß der Radius einer Halbkugel aus deren absolutem und spezifischem Gewichte berechnet werden kann. Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes wurde eine wässerige Lösung von borwolframsaurem Cadmium so hergestellt, daß die Linse in ihr gerade schwebte. Mit Hilfe eines mit Quecksilber beschwerten Glaskörpers wurde dann das spezifische Gewicht dieser Lösung und damit das der Linse bestimmt. Die Wägungen wurden mit einer Bungeschen Wage für 20 g Maximalbelastung durchgeführt. Nachdem endlich sämtliche Größen auf die Temperatur von 20° reduziert waren, eine Temperatur, bei der ich alle Beobachtungen anstellte, zeigte sich eine Abweichung von $^1/_{100}$ mm in den nach den beiden Methoden gefundenen Werten für den Radius der Linse. Die Abweichung ließ sich nur daraus erklären, daß ich keine exakte Halbkugel vor mir hatte. Es mußte daher die ziemlich schwierige Bestimmung der Dicke der Linse ausgeführt werden. Da hierbei das Sphärometer keine genauen Werte lieferte, ließ ich mir einen Apparat herstellen, dessen Vorder- und Seitenansicht die Fig. 6 veranschaulicht. Er bestand im wesentlichen aus einer mit einem Einschnitt versehenen Platte, auf der die Linse befestigt werden konnte. Die Platte selbst ließ sich durch zwei Schrauben *a* und *b* nach beiden Seiten neigen. Nachdem zunächst die Fläche des Frontkreises der Linse

parallel zum Fadenkreuz des Komparatormikroskopes aufgestellt war, wurden der Abstand der Ränder der Linse auf tausendstel mm genau gemessen. Dann ward durch eine der Schrauben a und b eine andere Neigung der Platte und Linse

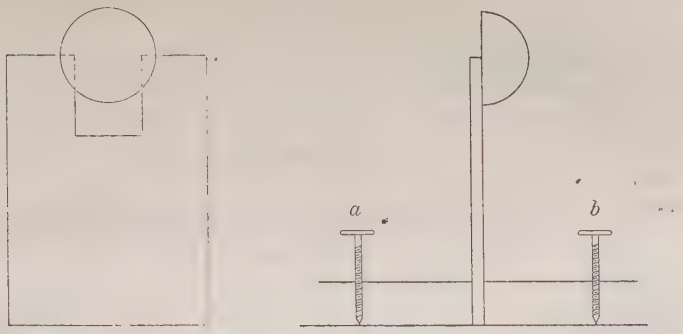

Fig. 6.

hergestellt und wieder gemessen usw. Die Werte für Abstände der Ränder wurden stetig kleiner, bis sie nach Durchgang durch ein Minimum wieder zunahmen. Das Minimum entspricht der Dicke der Linse

und wurde graphisch bestimmt. Um den Grad der Genauigkeit zu erhöhen, wurden 50 Kurven gezeichnet, deren Minima überraschend gut übereinstimmten. Hierbei zeigte sich nun, daß die Dicke der Linse von dem Radius des Frontkreises verschieden war. Aus der Höhe und Breite der Linse einerseits und aus der Formel für den Inhalt eines Kugelsegmentes

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h),$$

aus dem absoluten und spezifischen Gewichte andererseits wurde dann der Radius der Linse bestimmt. Es folgen hier Werte der Messungen.

1. Methode:

Durchmesser des Frontkreises der Linse	= 2,9875 mm
Dicke der Linse	= 3,0080 „
hieraus folgt r	= 2,9875 mm

2. Methode:

Absolutes Gewicht der Linse	= 0,1386 g
Spezifisches Gewicht der Linse . . .	= 2,4571 g
Dicke der Linse	= 3,0080 mm
hieraus folgt r	= 2,9879 mm

Die nach den beiden Methoden bestimmten Werte für den Radius der Linse unterscheiden sich nur noch um 4 Zehntausendstel mm. Diese Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenze, so daß eine noch genauere Methode überflüssig ist. Für die numerische Rechnung habe ich das Mittel aus den beiden r zugrunde gelegt, so daß der Radius der brechenden Fläche

$$r = 2{,}9877$$

beträgt.

3. Die Brechungsexponenten.

Die Bestimmung der Brechungsexponenten von Goldrubinglas, Linse und Immersion wurde ausgeführt mit Hilfe eines Refraktometers nach Abbe. Nachdem der Apparat vorher mit destilliertem Wasser geprüft und als exakt befunden war, wurden die Messungen bei Natriumlicht und einer Temperatur von 20° angestellt, und zwar 50mal im Laufe verschiedener Tage.

Wie schon erwähnt, sollte der Brechungsexponent der Linse mit dem des Goldrubinglases übereinstimmen. Der letztere betrug $n_0 = 1{,}5074$, während der der Linse den Wert $n_0 = 1{,}5071$ besaß. Diese Abweichung ist so gering, daß die Brechung der Kugelwelle an der Oberfläche des Glases unberücksichtigt bleiben kann. Als Immersion wurde ein Gemisch von Benzoesäure-Methylester ($n_0 = 1{,}5180$) und Benzylacetat ($n_0 = 1{,}5065$) verwendet. Diese Mischung besaß einen Brechungsexponenten, dessen Werte zwischen 1,5069 und 1,5073 schwankte. Für die Messung der Ringdurchmesser kommen

solche kleine Schwankungen überhaupt nicht in Betracht, da eine Immersion mit Brechungsindex $n_0 = 1{,}5065$ genau die gleichen Werte lieferte wie die Immersion mit Brechungsindex $n_0 = 1{,}5180$. Trotzdem kontrollierte ich die Brechungsindices vor jeder Messung und korrigierte sie durch Zusetzen der einen oder der anderen Flüssigkeit.

Der Rechnung liegt demnach ein Brechungsindex zugrunde von dem Werte

$$n_0 = 1{,}5071.$$

4. Wellenlänge des Lichtes und Lichtquelle.

Für die Berechnung der Beugungserscheinungen ist es notwendig, Licht von ganz bestimmter Wellenlänge vorauszusetzen. Ich versuchte daher homogenes Licht zu verwenden, indem ich als Lichtquelle eine Quecksilberlampe benutzte. Dies führte aber zu keinem günstigen Ergebnis, da die Beugungsringe infolge geringer Lichtintensität kaum sichtbar waren. Auch ein schmaler Streifen des Spektrums lieferte noch nicht die erforderliche Intensität. Ich mußte daher einen breiten Streifen des Spektrums als Lichtquelle verwenden, und zwar nahm ich gelbes Licht, da diese Farbe für die subjektive Beobachtung sehr günstig war. Die Ungenauigkeit, daß die Ringe durch Licht von verschiedener Wellenlänge erzeugt werden, ist aber von ganz geringer Bedeutung, da die Durchmesser der Ringe für rotes Licht sich nur wenig von denen für grünes Licht unterscheiden. Die Abweichungen überschritten kaum die Ungenauigkeit der Messung. Ich setzte daher in der numerischen Rechnung als Wellenlänge des Lichtes die des Natriumlichtes voraus

$$\lambda = 589\ \mu\mu.$$

Als Lichtquelle diente die für das Ultramikroskop bestimmte Bogenlampe, deren Licht durch ein Schwefelkohlenstoffprisma in ein Spektrum zerlegt wurde. Die Bogenlampe wurde seitwärts aufgestellt, so daß das gelbe Licht auf einen Straubelschen Kompensator fiel, der die Regulierung bewirkte.

5. Das Spektrometer.

Um die Durchmesser der Beugungsringe möglichst genau messen zu können, wurde ein Spektrometer von Spindler & Hoyer in Göttingen benutzt, mit Hilfe dessen man auf Sekunden ablesen konnte. Zu diesem Zwecke mußte das Mikroskop um 90° umgelegt und mittels eines Tisches am Spektrometer so befestigt werden, daß die Objektivlinse gerade in die Spektrometerachse fiel. Da bei dieser Anordnung das Fernrohr zu niedrig lag, wurde es durch einen Aluminiumarm so weit erhöht, bis seine Achse mit der des Mikroskopes eine gerade Linie bildete.

6. Das Objektiv.

Wie schon erwähnt, benutzte ich als Objektiv eine von der Firma Zeiss hergestellte Linse mit einer Fassung, die das Herausnehmen der Linse leicht gestattete. An dieser Fassung wurde ein Glastrog zur Aufnahme der Immersion durch Wasserglas festgekittet. Damit die Flüssigkeit nicht durch die Fassung hindurchdringen konnte, wurde zwischen ihr und der Linse ein Gummiring eingelegt, der aber oft erneut werden mußte, da er von der Immersionsflüssigkeit rasch zerstört wurde. Die Fig. 7 zeigt schematisch das Objektiv. Das Goldrubinglas wurde schließlich von oben durch einen nach drei Richtungen verstellbaren Arm in die Flüssigkeit getaucht.

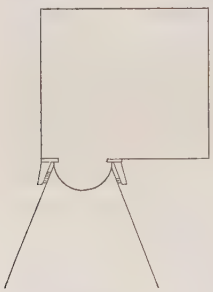

Fig. 7.

7. Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung für die Messung der Durchmesser der Beugungsringe ist prinzipiell dieselbe wie bei der gewöhnlichen ultramikroskopischen Anordnung. Die einzigen Unterschiede liegen darin, daß die Lichtquelle seitwärts aufgestellt wurde und das Licht erst nach Durchgang durch ein Schwefelkohlenstoffprisma und einen Straubelschen Kompensator durch die entsprechenden Sammellinsen in das Präparat gelangen konnte, und schließlich, daß das Mikroskop nach Um-

legen um 90° auf ein Spektrometer aufgestellt wurde. Die Fig. 8 gibt die Versuchsanordnung an.

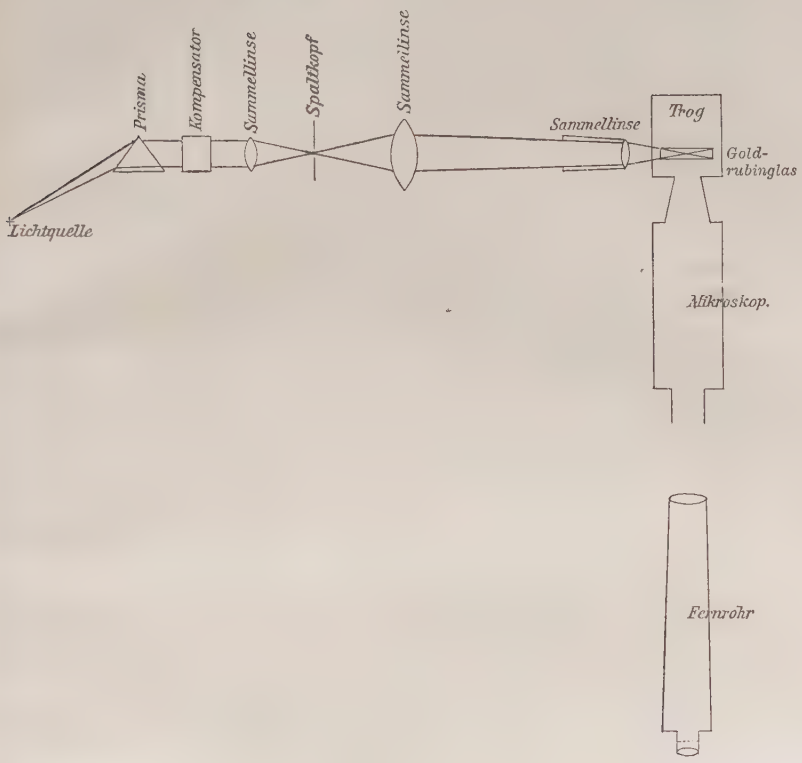

Fig. 8.

8. Die Beugungsringe und ihre Messung.

Betrachtet man im Ultramikroskop mit irgend einem Objektiv ein Präparat mit ultramikroskopischen Teilchen, so sieht man zunächst ein leuchtendes Scheibchen, das von einem dunklen und einem hellen Ringe umgeben ist. Verkleinert man dann den Abstand des Teilchens von dem Objektiv, so werden die Ringe kleiner, während sich gleichzeitig von außen her neue Ringe angliedern. Sehr bald tritt aber eine neue, ganz eigenartige Erscheinung auf. Es kommt nämlich zu den bereits vorhandenen Ringen ein zweites Ringsystem hinzu, das sich dadurch bemerkbar macht, daß einige Ringe des

ersten Systems an Helligkeit einbüßen. Diese beiden Systeme unterscheiden sich aber wesentlich voneinander. Erstens sind die Ringe des zweiten Systems breiter als die des ersten, zweitens nehmen die Ringe des zweiten Systems nach außen hin an Helligkeit zu, während die des ersten abklingen, und drittens werden die Durchmesser des zweiten Systems größer,

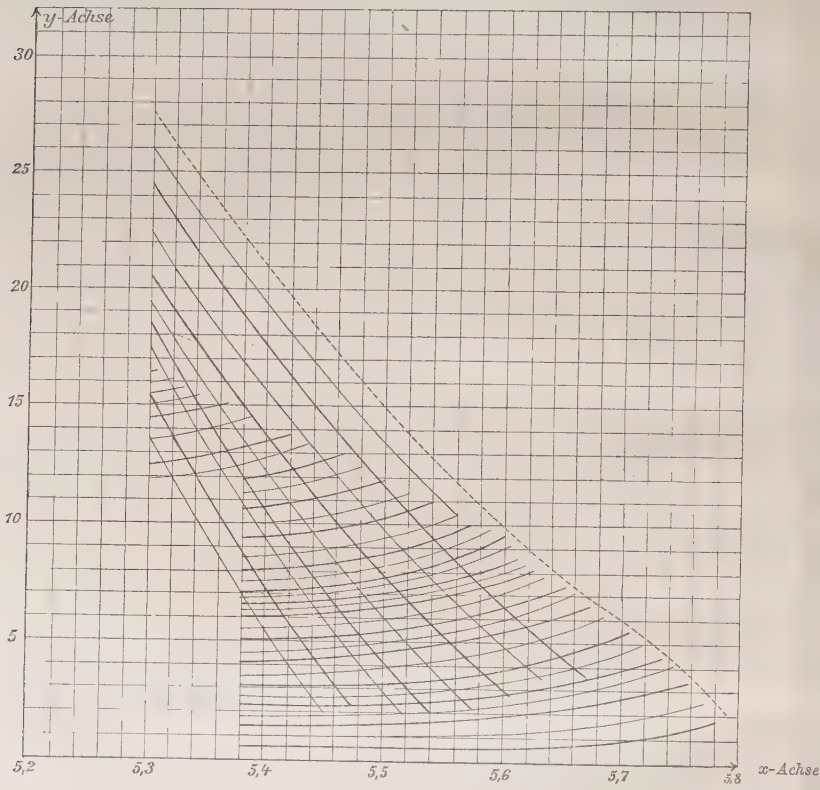

Fig. 9.

wenn man das Objektiv dem leuchtenden Teilchen nähert. Wenn sich die beiden Systeme auch zum Teil durchsetzen, so beschränkt sich das erste System mehr auf den inneren, das zweite System aber mehr auf den äußeren Teil. In Fig. 9 sind für verschiedene Abstände a des Teilchens vom Objektiv die Werte der Durchmesser eingetragen, so daß man ein Bild

von der Erscheinung erhält. Es bedeuten die stärker ausgezogenen Linien die Minima, die schwächer ausgezogenen Linien die Maxima. Auf der x-Achse wurden die Abstände a so abgetragen, daß ein Teilstrich $^1/_{50}$ mm bedeutet, während die y-Achse die Durchmesser der Ringe in Minuten angibt, daß ein Teilstrich = 1 Minute. Natürlich brechen bei $a = 5{,}4$ die inneren Ringe nicht etwa ab, da es aber bei $a = 5{,}3$ nur auf die äußeren Ringe ankam, so ließ ich die Messung und Rechnung für die inneren Ringe weg.

Die Messungen selbst wurden durch die Schwankungen des Turmes beeinträchtigt, in den die Messungen hatten stattfinden müssen, da die anderen Institutsräume vergeben waren. Trotzdem das Spektrometer auf einen Steinpfeiler gesetzt war, konnten exakte Messungen nur am Abend ausgeführt werden, wenn die übrigen Arbeiten im Institut ruhten. Besonders erschwerend war der Umstand, daß der Experimentator, nachdem er auf einen Ring eingestellt hatte, zum Ablesen auf die Seite treten mußte. Dadurch wurde der Fußboden erschüttert und die Einstellung auf den Ring vernichtet. Es war daher unmöglich allein zu beobachten; und deshalb half mir Hr. stud. math. Fickenwirth in freundlichster Weise, wofür ich ihm noch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Nachdem alle Vorsichtsmaßregeln getroffen waren, stellte ich auf ein berechnetes Ringsystem ein. Dann wurde die Mikrometerschraube um einen meßbaren Betrag verstellt und die Ringe wieder gemessen, und so fort für die verschiedensten Abstände des leuchtenden Punktes von dem Objektiv. Dabei wurde jeder Ring an verschiedenen Tagen je 10 mal gemessen. Die inneren, engeren Ringe gaben gewöhnlich die besseren Werte, während die äußeren Ringe infolge ihrer Breite größere Differenzen aufwiesen. Um auch die Ungenauigkeit des Teilkreises zu eliminieren, wurden die Messungen an verschiedenen Stellen des Teilkreises vorgenommen.

9. Die Form der Wellenlinie.

Für das Verständnis der Beugungserscheinungen ist es notwendig, zu einigen Abständen a des leuchtenden Punktes von dem Objektiv die durch den Mittelpunkt der brechenden

Fläche gehenden Wellenlinien zu zeichnen. Auf p. 222 ist dies für sieben verschiedene a geschehen und in Tab. 4 ist die Rechnung für $a = 5{,}680$ mm durchgeführt.

Tabelle 4.

α	ε	β	$\pi - \mu$	$(\xi - a)$	η
0° 0′	0°	0°	0°	0	0
30	0°57′ 2″	0 25′ 58″	− 0 1′ 5″	−0,000019	+0,074702
1 0	1 54 5	2 51 58	− 0 2 7	−0,000046	0,149398
30	2 51 9	4 18 5	− 0 3 4	−0,000107	0,224083
2 0	3 48 15	5 44 20	− 0 3 56	−0,000175	0,298751
30	4 45 24	7 10 46	− 0 4 38	−0,000274	0,373396
3 0	5 42 37	8 37 27	− 0 5 10	−0,000377	0,448013
30	6 39 53	10 4 26	− 0 5 28	−0,000493	0,522596
4 0	7 37 15	11 31 45	− 0 5 30	−0,000615	0,597138
30	8 34 42	12 59 28	− 0 5 14	−0,000730	0,671636
5 0	9 32 15	14 27 39	− 0 4 36	−0,000835	0,746082
30	10 29 56	15 56 21	− 0 3 35	−0,000927	0,820471
6 0	11 27 44	17 25 38	− 0 2 6	−0,000990	0,894695
30	12 25 41	18 55 35	− 0 0 7	−0,001007	0,969057
7 0	13 23 48	20 26 14	+ 0 2 26	−0,000991	1,04324
30	14 22 4	21 57 41	+ 0 5 37	−0,000897	1,11735
8 0	15 20 32	23 30 2	+ 0 9 30	−0,000745	1,19136
30	16 19 13	25 3 21	+ 0 14 9	−0,000478	1,26528
9 0	17 18 6	26 37 45	+ 0 19 39	−0,000130	1,33909
30	18 17 13	28 13 20	+ 0 26 7	+0,000356	1,41278
10 0	19 16 35	29 50 13	+ 0 33 38	+0,000995	1,48636
15 0	29 28 31	47 51 54	+ 3 23 23	+0,239640	2,21813
20 0	40 33 31	78 30 29	+17 56 58	+1,658015	3,03011

10. Die Durchmesser der Beugungsringe.

Um die Durchmesser der Beugungsringe zu berechnen, ist es erforderlich, die Intensität J (Gleichung (22)) als Funktionen von $\pi - \mu$ darzustellen. Zu diesem Zwecke müssen die Δ nach den Gleichungen (25) berechnet werden. Diese Gleichungen lassen sich aber nicht ohne weiteres benutzen, da in ihnen der Winkel μ nicht explizit vorkommt. Es muß daher aus den in Tab. 4 berechneten $\pi - \mu$ eine Kurve $f(\alpha)$ gezeichnet werden, aus der die drei zu einem bessimmten μ gehörigen

Werte α auf 10 Sek. genau entnommen werden konnte. Dies wurde durchgeführt für μ in Intervallen von 15 zu 15 Sek. und für die aus der Kurve gefundenen α die Werte für ε nach den Gleichungen (2) bestimmt. Durch eine einfache Subtraktion und Addition erhält man dann

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1),\quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1),\quad \tfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_1),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3),$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3),\quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_3),\quad \tfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_3)$$

aus denen sich die Werte für Δ ergeben. Aus der Gleichung (22) erhält man durch logarithmische Rechnung die zu einem bestimmten μ gehörige Intensität J. Diese Werte J wurden schließlich als Funktion von $\pi-\mu$ in eine Kurve eingezeichnet, deren Maxima und Minima die Durchmesser der hellen und dunklen Ringe ergeben. Für $a = 5{,}680$ gibt die Tab. 5 auf p. 218 und 219 den Gang der Rechnung an.

Durch die Kurve $J = f(\pi-\mu)$ ergeben sich dann die in Tab. 6 unter „berechnet“ eingetragenen Winkelhalbmesser der Beugungsringe. Unter „beobachtet“ stehen zum Vergleich die gemessenen Winkelhalbmesser, und unter Messung–Rechnung die Differenz zwischen Messung und Rechnung.

Tabelle 6 ($a = 5{,}680$).

	berechnet	beobachtet	Messung–Rechnung
		Minima.	
I. Ring	0′ 21″	0′ 49″ ± 5″	+28″
II. „	2 6	2 10 ± 5	+ 4
III. „	3 35	3 34 ±10	− 1
IV. „	4 54	4 58 ±10	− 4
		Maxima.	
I. Ring	1′ 6″	1′ 35″ ± 5″	+29″
II. „	3 5	3 0 ±10	− 5
III. „	4 15	4 20 ±10	+ 5
IV. „	5 21	5 27 ±10	+ 6

In gleicher Weise wie die Tab. 6 sind die Beugungsringe für $a = 5{,}560$ mm und für $a = 5{,}300$ mm berechnet worden, für den letzteren Abstand aber nur für den äußeren Teil, da

Tabelle

$\pi-\mu$	α_1	α_2	α_3	ε_1	ε_2	ε_3	$\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_1)$	$\frac{1}{2}(\alpha_2-$
0′ 0″	0° 0′ 0″	6°31′30″	−6°31′30″	0° 0′ 0″	12°28′30″	−12°28′30″	3°15′50″	3°15′5
15	6 10	28 0	34 40	11 40	21 50	34 30	17 10	10 5
30	13 0	24 40	38 0	24 40	15 20	41 10	18 50	4 5
45	20 20	21 10	41 0	38 40	8 40	47 0	20 50	0 3
1 0	27 30	17 30	44 10	52 20	1 30	53 10	22 30	2 55
15	35 0	13 50	47 0	1 6 30	11 54 30	58 53	24 30	49 3
30	42 20	10 0	50 0	20 30	47 0	13 4 0	26 10	43 5
45	49 40	5 50	52 40	34 20	38 50	9 30	27 50	38 1
2 0	57 20	1 50	55 20	49 0	31 20	14 40	29 40	32 2
15	1 5 0	5 57 30	58 0	2 3 40	23 0	19 50	31 15	26 2
30	12 40	53 10	7 0 40	18 10	14 30	25 0	33 0	20 2
45	20 30	48 20	3 20	33 10	5 10	30 10	34 30	14
3 0	28 0	43 10	6 0	47 20	10 55 20	25 20	35 40	7 4
15	35 40	37 30	8 20	3 3′20	44 20	40 0	36 40	1 5
30	44 10	31 40	10 40	18 10	33 10	44 40	38 0	1 53 5
45	54 0	25 40	13 10	36 50	21 40	49 20	39 50	45 3
4 0	2 2 30	19 10	15 30	53 0	9 10	53 50	40 50	38 2
15	12 0	11 40	18 0	4 11 10	9 54 40	58 40	41 50	29 5
30	23 20	4 0	20 20	30 50	40 0	14 3 20	43 50	20 2
45	35 50	4 54 10	22 30	56 30	21 10	7 30	45 0	9 1
5 0	49 0	44 20	24 40	5 21 40	2 10	11 40	46 20	0 57 4
15	6 20	29 20	26 50	54 40	8 33 20	15 50	47 50	21 3
30	39 10	0 50	29 0	6 57 30	7 28 20	20 10	50 0	10 5

($a = 5{,}680$).

$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$	$\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)$	$\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)$	$\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_3)$	$\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_3)$	$\frac{1}{2}\Delta_{12}+45$	$\frac{1}{2}\Delta_{13}+45$	$\frac{1}{2}\Delta_{23}$	J
°14′ 20″	9°30′ 0″	0° 0′ 0″	6°31′ 30″	12°28′ 30″	19° 0′ 0″	355°	355°	0°	1,06
5 10	16 0	3 20	31 20	28 10	18 59 30	334	378	44	0,21
55 30	0 20	6 40	31 20	28 10	59 30	312	399	87	0,80
45 0	8 45 30	10 0	31 10	27 50	59 0	293	424	131	5,35
34 30	29 30	13 20	30 50	27 20	58 10	273	448	175	8,90
24 0	13 30	16 40	30 30	26 30	57 0	255	473	218	6,60
13 20	7 57 10	20 0	30 0	25 30	55 30	236	491	255	2,30
2 20	46 30	23 30	29 20	24 10	53 30	218	529	301	0,48
51 10	23 30	26 40	28 40	23 0	51 40	201	544	343	0,19
39 40	6 0	30 30	27 50	21 30	49 20	183	573	390	0,20
28 10	6 48 30	33 50	27 0	19 50	46 50	168	608	440	0,71
16 0	30 0	37 30	25 50	17 40	43 30	153	625	472	2,36
4 0	11 40	41 30	24 40	15 20	40 0	139	657	518	5,34
50 30	5 51 30	45 30	23 0	12 10	35 10	125	685	560	4,53
37 30	31 20	49 30	21 10	9 0	30 10	112	713	601	0,56
22 20	7 50	53 50	19 30	5 40	25 10	99	743	644	1,74
8 5	4 46 30	58 10	17 20	1 30	18 50	89	773	684	6,17
51 50	21 40	1 3 10	14 50	11 56 40	11 30	79	806	727	8,78
34 40	3 55 0	8 10	12 10	51 40	2 50	70	837	767	5,58
12 20	21 30	14 10	8 20	44 20	17 52 40	61	871	810	1,00
50 20	2 48 10	20 10	4 30	37 0	41 30	52	897	845	0,87
19 20	1 40 50	28 50	5 58 10	24 40	22 50	47	935	888	4,28
15 30	0 26 20	44 10	44 30	10 54 20	16 39 50	45	959	914	5,71

der innere nicht in Betracht kommt. Die Tab. 7 und 8 geben die Resultate der Rechnung und Messung an.

Tabelle 7 ($a = 5{,}560$ mm).

	berechnet	beobachtet	Messung–Rechnung
		Minima	
I. Ring	0′ 58″	0′ 46″ ± 5″	−12″
II. „	2 15	1 45 ± 5	−30
III. „	2 57	2 26 ± 10	−21
IV. „	3 44	3 33 ± 10	−11
V. „	4 55	4 56 ± 10	+ 1
VI. „	5 51	5 54 ± 10	− 3
VII. „	7 22	6 59 ± 10	−23
VIII. „	7 50	7 37 ± 10	−13
IX. „	8 52	8 40 ± 10	−12
X. „	9 50	9 42 ± 10	− 8
		Maxima	
I. Ring	1′ 37″	1′ 11″ ± 5″	−26″
II. „	2 35	2 9 ± 5	−24
III. „	3 17	3 1 ± 10	−16
IV. „	4 12	4 1 ± 10	−11
V. „	5 33	5 15 ± 10	−18
VI. „	6 19	6 13 ± 10	− 6
VII. „	7 33	7 15 ± 10	−18
VIII. „	8 24	8 12 ± 10	−12
IX. „	9 22	9 17 ± 10	− 5
X. „	10 16	10 14 ± 10	− 2

Tabelle 8 ($a = 5{,}300$ mm).

	berechnet	beobachtet	Messung–Rechnung
		Minima	
XIV. Ring	12′ 48″	12′ 38″ ± 10″	−10″
XV. „	14 34	14 27 ± 10	− 7
XVI. „	15 30	15 25 ± 10	− 5
XVII. „	16 38	16 28 ± 10	−10
XVIII. „	18 40	18 31 ± 10	− 9
XIX. „	20 40	20 33 ± 10	− 7
XX. „	24 30	24 27 ± 10	− 3

Tabelle 8 (Fortsetzung).

	berechnet	beobachtet	Messung–Rechnung
		Maxima	
XIII. Ring	12′	11′ 53″ ± 10″	− 7″
XIV. „	13 40″	13 28 ± 10	−12
XV. „	15 8	15 2 ± 10	− 6
XVI. „	16 6	15 54 ± 10	−10
XVII. „	17 40	17 27 ± 10	−13
XVIII. „	19 20	19 11 ± 10	− 9
XIX. „	22 24	22 11 ± 10	−13
XX. „	25 48	25 41 ± 10	− 7

11. Diskussion der Messung und Rechnung.

Vergleichen wir die Resultate, die sich aus Messung und Rechnung ergeben, so bemerken wir eine Übereinstimmung in der Zahl der auftretenden Beugungsringe und in der Größenordnung ihrer Durchmesser. Für die meisten Durchmesser liegen die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung sogar innerhalb der Fehlergrenze. Es ist also das Ergebnis ein äußerst günstiges; denn wir müssen uns vergegenwärtigen, daß die Mascartsche Methode nur eine angenäherte ist, da sie für das Zustandekommen der Interferenz nur drei ausgezeichnete Strahlen, die von den Polen der Wellenlinie ausgehen, benutzt und ferner Zylinderlinsen voraussetzt, während wir sämtliche Messungen mit Kugellinsen durchgeführt haben. Letzteres bedingt vor allem für die Zentralstrahlen eine große Differenz, da hier der Unterschied zwischen Kugel und Zylinder besonders in Betracht kommt, so daß sich die großen Abweichungen zwischen Messung und Rechnung für die inneren Ringe durch die Ungenauigkeit der Methode erklären lassen.

12. Die beiden Ringsysteme.

Die vorigen Abschnitte hatten lediglich die Übereinstimmung der Ringdurchmesser für Messung und Rechnung ergeben, ohne über das Entstehen und Verhalten zweier Ringsysteme, wie sie die Beobachtung zeigt, Auskunft zu erteilen. Eine weitere Rechnung, durchgeführt bis $a = 5{,}000$, lehrte,

daß die äußersten Ringe stets innerhalb des geometrischen Bogens[1]) bleiben. (In Fig. 10 ist der geometrische Bogen für die verschiedenen a durch die punktierte Linie angedeutet.) Es liegt daher der Schluß nahe, daß sich die beiden Ringsysteme ihres Entstehens nach überhaupt nicht unterscheiden. Wie sind sie aber dann zu erklären? Um sich über diese Frage Klarheit zu verschaffen, dienen die nachstehend gezeichneten Wellenlinien.

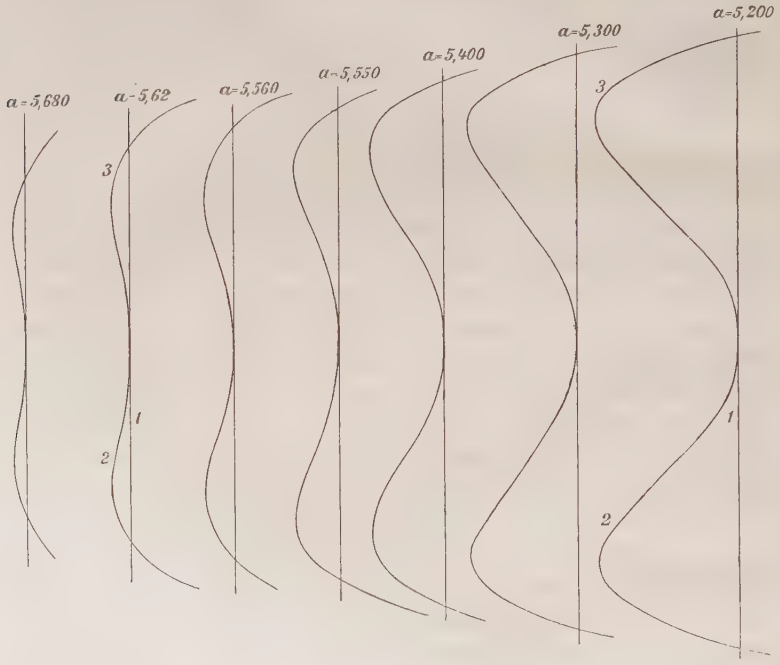

Fig. 10.

Nach Mascart denken wir uns von drei Polen 1, 2, 3 Wellenzüge ausgehen, die durch Superposition Maxima und Minima ausbilden. Gehen wir bei der Betrachtung von kleinen Winkeln $\pi - \mu$ aus, so sehen wir, daß für diese die Phasenunterschiede der Pole 2 und 3 gering sind. Diese beiden Pole können sich demnach nur unterstützen. Die inneren Ringe entstehen dann durch Übereinanderlagerung der Wellen-

1) W. Möbius, Diss. l. c.

züge 1 und 2. Wird durch Verkleinerung der Abstand a des Objektivs vom ultramikroskopischen Teilchen die Wellenlinie weiter verzerrt, so ist ein kleinerer Winkel $\pi - \mu$ hinreichend, um die notwendigen Phasenunterschiede für das Zustandekommen eines Maximum bzw. Minimum zu erhalten. Die Ringdurchmesser müssen also kleiner werden. Gleichzeitig wird aber die Wellenlinie stärker verzerrt, woraus folgt, daß sich von außen neue Ringe angliedern. Auf diese Weise erklärt sich das Ringsystem I.

Vergrößern wir nun den Winkel $\pi - \mu$, so entstehen für die Pole 2 und 3 größere Phasendifferenzen. Es beginnt jetzt der Pol 3, der vorher unterstützte, entgegengesetzt zu wirken, so daß schwächere Maxima und hellere Minima auftreten. Geht man nun zu noch größeren Winkeln über, so werden die Phasendifferenzen der Pole 2 und 1 so gering, daß die zugehörigen Ringe im wesentlichen durch die Pole 2 und 3 erzeugt werden. Für solche große Winkel $\pi - \mu$ sind die Krümmungen der Wellenfläche in den beiden Polen wenig verschieden. Es ist daher eine große Zunahme des Winkels $\pi - \mu$ notwendig, um Phasenunterschiede hervorzurufen, die Maxima und Minima ausbilden können. Dieses zweite System muß daher breitere Ringe aufweisen. Es fragt sich nun nur noch, ob diese Ringe nach außen wandern. Um dies zu entscheiden, wollen wir für eine bestimmte Wellenlinie den Winkel $\pi - \mu$ betrachten, für den durch die Pole 2 und 3 gerade der erste innerste Ring erzeugt wird. Verkleinern wir dann den Abstand a, so rücken wegen der zunehmenden Krümmung der Wellenlinie die Pole näher an die Scheitelpunkte der Wellenlinie, der Gangunterschied wird dadurch kleiner, und es bedarf eines größeren Winkels, um den alten Gangunterschied wieder zu gewinnen, d. h. der Ring rückt nach außen.

13. Erklärung der Blendenwirkung.

Auf p. 191ff. habe ich gezeigt, daß Blenden erst bei genügender Kleinheit zu wirken beginnen. Es fragt sich also noch zum Schlusse, wie sich dies erklären läßt.

Bei großen Blenden wird wohl der äußerste Teil der Strahlen abgeblendet, nicht aber die Pole, die die Beugung

im Ultramikroskop hervorrufen. Dies wird aber anders, sobald die Blenden genügend klein sind. Es werden dann nämlich die Pole abgeblendet, die Beugungserscheinungen können nur noch durch Beugung an der Blende entstehen, und es muß sich rechnerisch und experimentell eine Übereinstimmung mit den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen ergeben.

14. Zusammenfassung der Resultate.

1. Die im Ultramikroskop auftretenden Beugungserscheinungen sind nicht bedingt durch die Blenden im Objektiv.

2. Erst durch Einsetzen von kleinen Blenden kann man die komplizierten Beugungserscheinungen beseitigen und Fraunhofersche erhalten.

3. Die Beugungserscheinungen des Ultramikroskops in normaler Benutzung werden in ähnlicher Weise wie die überzähligen Bogen beim Regenbogenphänomen infolge von Deformation der Wellenfläche nach Brechung an einer Kugelfläche erzeugt. Dabei treten Ringe auf, deren Zahl bei Annäherung des Objektivs an das Objekt durch Umlagerung von außen vergrößert und deren Durchmesser verkleinert wird (Ringsystem I). Hierzu kommt ein Ringsystem II, das sich von dem ersten durch breitere Ringe unterscheidet, die zugleich bei jener Annäherung im entgegengesetzten Sinne wandern.

Zum Schlusse erwächst mir noch die angenehme Pflicht, Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. Wiener für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für das große Interesse, das er derselben stets entgegengebracht hat, sowie den Herren Privatdozent Dr. Scholl und Dr. Möbius für die zahlreichen Ratschläge bei Durchführung des theoretischen und experimentellen Teiles meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Am 5. Mai 1884 wurde ich, Karl Ernst Wilhelm Potzger, zu Dresden-N. geboren als Sohn des Staatsbahnschaffners Ernst Potzger. Meinen ersten Unterricht erhielt ich in der 7. Bezirksschule meiner Vaterstadt. Ostern 1894 verließ ich diese Anstalt, um meine weitere Ausbildung auf der Dreikönigschule (Realgymnasium) zu Dresden-N. zu empfangen. Nach bestandener Reifeprüfung Ostern 1903 wandte ich mich dem Studium der Mathematik und Physik zu und studierte bis 1905 an der Königl. Sächs. Techn. Hochschule zu Dresden und dann an der Universität Leipzig, wo ich mich 1907 der Staatsprüfung für Kandidaten des höheren Schulamtes unterzog. Mein Probejahr legte ich von Ostern 1907 bis Ostern 1908 an der Petrischule (Realgymnasium) zu Leipzig ab und wurde Ostern 1908 vom Rate der Stadt Leipzig an der gleichen Anstalt als nichtständiger Gymnasiallehrer angestellt, in welcher Eigenschaft ich mich noch jetzt befinde.

Meine Lehrer während meiner Studienzeit waren

in Dresden: Hallwachs, Helm, Hempel, Krause, Naetsch, Pattenhausen, Reuchel, Rohn, Stern, Toepler;

in Leipzig: Des Coudres, Hölder, Jungmann, Marx, Mayer, Rohr, Volkelt, Wiener, Wundt.

Allen diesen Herren sage ich für ihren Unterricht und für ihr mir stets bewiesenes Wohlwollen meinen aufrichtigsten Dank.